

システムの半値幅

はじめに

本稿では筆者が長きにわたり経験した計測機器開発でのシステムの応答について議論する。応答とは原信に対する劣化、ボケである。主に時系列を扱うシステムが多かったように思うが時系列に限定するものではない。ここでは数値計算の手法というよりボケをどのように見積もるかがテーマである。

半値幅

ボケを測る指標として半値半幅 h がある(図1)。

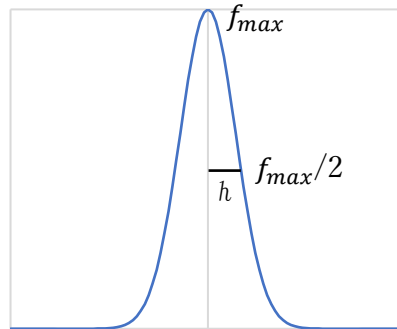


図1 半値半幅

半値半幅は波高が最大値の半分となる位置の幅 h で定義される。略して半値幅というとき半値全幅を指すことが多いかもしれない。本稿では σ との対比から半値半幅を半値幅として述べる。

ボケ(信号の劣化)

一般に原信 f をシステムに入力して出力の観測信号 m を得る(図2)。

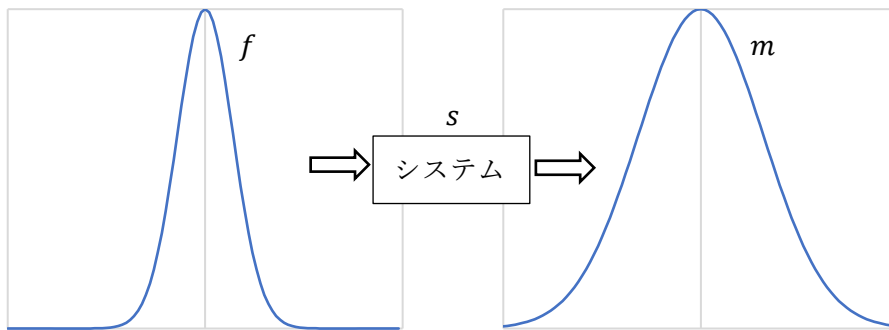


図2 ボケ(信号の劣化)

数理としては、時間(あるいは空間)領域の信号はシステムの応答関数 s を畳み込んで表現する(1).

$$m(t) = f(t) \otimes s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) s(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

\otimes : 畳み込み

時系列の場合、インパルス応答の重ね合わせ(加算)になる。これを、半無限の積分区間で表現することもある。

ガウス関数の仮定

最初に原信とシステムの応答関数いずれもガウス関数の場合を考える。その前に σ と半値幅の関係を明らかにする。ガウス関数は(2)である。

$$\exp\left(\frac{-(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2)$$

半値幅 h として(3)より σ との関係を得られる。

$$\frac{1}{2} = \exp\left(\frac{-((\bar{x} + h) - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

$\bar{x} = 0$ とすれば(4)と簡単で、(5)となる..

$$\frac{1}{2} = \exp\left(\frac{-h^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

$$2 = \exp\left(\frac{h^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{h^2}{2\sigma^2} = \ln 2$$

$$h^2 = 2\sigma^2 \ln 2$$

$$h = \sqrt{2 \ln 2} \sigma$$

$$h \approx 1.18\sigma \quad (5)$$

半値幅は偏差に比例する。ここで原信とシステムの応答関数を(6), (7)で定義する。

$$f(t) = a_f \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_f^2}\right) \quad (6)$$

$$s(t) = a_s \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (7)$$

畳み込んで観測信号 $m(t)$ とする(8)→(9).

$$m(t) = f(t) \otimes s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) s(t - \tau) d\tau \quad (8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_f \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\sigma_f^2}\right) a_s \exp\left(\frac{-(t - \tau)^2}{2\sigma_s^2}\right) d\tau$$

$$= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\sigma_f^2} + \frac{-(t - \tau)^2}{2\sigma_s^2}\right) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\sigma_s^2 \tau^2 - \sigma_f^2 (t^2 - 2\tau t + \tau^2)}{2\sigma_f^2 \sigma_s^2}\right) d\tau \\
&= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_f^2 \sigma_s^2} ((\sigma_s^2 + \sigma_f^2)\tau^2 - 2\sigma_f^2 t\tau + \sigma_f^2 t^2)\right) d\tau \\
&= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_f^2 \sigma_s^2} \left(\left(\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} \tau - \frac{\sigma_f^2 t}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}\right)^2 - \frac{\sigma_f^4 t^2}{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} + \sigma_f^2 t^2\right)\right) d\tau \\
&= a_f a_s \exp\left(\frac{\sigma_f^4 t^2 - \sigma_f^2 t^2 (\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}{2\sigma_f^2 \sigma_s^2 (\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_f^2 \sigma_s^2} \left(\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} \tau - \frac{\sigma_f^2 t}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}\right)^2\right) d\tau \\
&= a_f a_s \exp\left(\frac{-\sigma_f^2 \sigma_s^2 t^2}{2\sigma_f^2 \sigma_s^2 (\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_f^2 \sigma_s^2} \left(\frac{(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)\tau - \sigma_f^2 t}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}\right)^2\right) d\tau \\
&= a_f a_s \exp\left(\frac{-t^2}{2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)\tau - \sigma_f^2 t}{\sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}\right)^2\right) d\tau \quad (9)
\end{aligned}$$

積分の項は(10)において置換積分できる.

$$x = \frac{(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)\tau - \sigma_f^2 t}{\sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}} \quad (10)$$

$$(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)\tau - \sigma_f^2 t = \sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} x$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} x + \sigma_f^2 t}{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}$$

従って積分の項は(11)となる.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)\tau - \sigma_f^2 t}{\sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}\right)^2\right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \frac{\sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} dx = \frac{\sqrt{2}\sigma_f \sigma_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \quad (11)
\end{aligned}$$

ガウス積分の公式は(12)である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (12)$$

以上より観測信号は(13)となる..

$$\begin{aligned}
m(t) &= a_f a_s \exp\left(\frac{-t^2}{2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}\right) \frac{\sqrt{2}\sigma_f\sigma_s\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}}{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} \sqrt{\pi} \\
&= a_f a_s \sigma_f \sigma_s \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}} \exp\left(\frac{-t^2}{2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}\right) \quad (13)
\end{aligned}$$

ガウス関数同士の畳み込みはガウス関数となる。そして観測信号の偏差 σ_m は(14)である。

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} \quad (14)$$

従って半値幅も同様である(15)。

$$h_m = \sqrt{h_s^2 + h_f^2} \quad (15)$$

積分区間が半無限であった場合はどうか？ ガウス積分は(16)である。

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (16)$$

従って、積分区間が変化しても偏差 σ_m は(14)のままよい。

ローレンツ関数の仮定

ローレンツ関数は(17)である.

$$\frac{\sigma}{(x - \bar{x})^2 + \sigma^2} \quad (17)$$

ガウス関数と似た形状の関数であり, ガウス関数と同様に半値幅を見積もる(18).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} &= \frac{\sigma}{h^2 + \sigma^2} \\ h^2 + \sigma^2 &= 2\sigma^2 \\ h^2 &= \sigma^2 \\ h &= \sigma \quad (18) \end{aligned}$$

ローレンツ関数の半値幅は偏差そのものである. ここで原信とシステムの応答関数を(19), (20)で定義する.

$$f(t) = a_f \frac{\sigma_f}{t^2 + \sigma_f^2} \quad (19)$$

$$s(t) = a_s \frac{\sigma_s}{t^2 + \sigma_s^2} \quad (20)$$

畳み込んで観測信号 $m(t)$ とする(21).

$$\begin{aligned} m(t) &= f(t) \otimes s(t) \quad (21) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_f \frac{\sigma_f}{\tau^2 + \sigma_f^2} a_s \frac{\sigma_s}{(t - \tau)^2 + \sigma_s^2} d\tau \\ &= a_f a_s \sigma_f \sigma_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau^2 + \sigma_f^2)((\tau - t)^2 + \sigma_s^2)} d\tau \end{aligned}$$

形式は有理関数である(22).

$$\frac{1}{(\tau^2 + \sigma_f^2)((\tau - t)^2 + \sigma_s^2)} = \frac{A\tau + B}{\tau^2 + \sigma_f^2} + \frac{C\tau + D}{(\tau - t)^2 + \sigma_s^2} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (A\tau + B)((\tau - t)^2 + \sigma_s^2) + (C\tau + D)(\tau^2 + \sigma_f^2) &= 1 \\ (A\tau + B)(\tau^2 - 2t\tau + t^2 + \sigma_s^2) + (C\tau + D)(\tau^2 + \sigma_f^2) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$(A + C)\tau^3 + (-2tA + B + D)\tau^2 + ((t^2 + \sigma_s^2)A - 2tB + \sigma_f^2 C)\tau + (t^2 + \sigma_s^2)B + \sigma_f^2 D - 1 = 0$$

よって係数の連立は(23)~(26)である.

$$A + C = 0 \quad (23)$$

$$-2tA + B + D = 0 \quad (24)$$

$$(t^2 + \sigma_s^2)A - 2tB + \sigma_f^2 C = 0 \quad (25)$$

$$(t^2 + \sigma_s^2)B + \sigma_f^2 D - 1 = 0 \quad (26)$$

連立を解く(27)~(30).

$$A = -C$$

$$2tC + B + D = 0$$

$$B = -D - 2tC$$

$$-(t^2 + \sigma_s^2)C - 2t(-D - 2tC) + \sigma_f^2 C = 0$$

$$2tD = (t^2 + \sigma_s^2)C - 4t^2 C - \sigma_f^2 C$$

$$D = \frac{-3t^2 + \sigma_s^2 - \sigma_f^2}{2t} C$$

$$\begin{aligned} B &= -\frac{-3t^2 + \sigma_s^2 - \sigma_f^2}{2t} C - 2tC = \frac{3t^2 - \sigma_s^2 + \sigma_f^2 - 4t^2}{2t} C \\ &= \frac{-t^2 - \sigma_s^2 + \sigma_f^2}{2t} C \end{aligned}$$

$$(t^2 + \sigma_s^2) \frac{-t^2 - \sigma_s^2 + \sigma_f^2}{2t} C + \sigma_f^2 \frac{-3t^2 + \sigma_s^2 - \sigma_f^2}{2t} C - 1 = 0$$

$$\frac{(t^2 + \sigma_s^2)(-t^2 - \sigma_s^2 + \sigma_f^2) + \sigma_f^2(-3t^2 + \sigma_s^2 - \sigma_f^2)}{2t} C = 1$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2t}{-t^4 + (-\sigma_s^2 + \sigma_f^2 - \sigma_s^2 - 3\sigma_f^2)t^2 + (-\sigma_s^4 + \sigma_s^2\sigma_f^2 + \sigma_f^2\sigma_s^2 - \sigma_f^4)} \\ &= \frac{2t}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^4 - 2\sigma_s^2\sigma_f^2 + \sigma_f^4)} \\ &= \frac{2t}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \quad (27) \end{aligned}$$

$$B = \frac{-t^2 - \sigma_s^2 + \sigma_f^2}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \quad (28)$$

$$D = \frac{-3t^2 + \sigma_s^2 - \sigma_f^2}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \quad (29)$$

$$A = \frac{-2t}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \quad (30)$$

従って積分は(31)となる.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau^2 + \sigma_f^2)((\tau - t)^2 + \sigma_s^2)} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A\tau + B}{\tau^2 + \sigma_f^2} + \frac{C\tau + D}{(\tau - t)^2 + \sigma_s^2} \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A\tau}{\tau^2 + \sigma_f^2} + \frac{B}{\tau^2 + \sigma_f^2} + \frac{C\tau}{(\tau - t)^2 + \sigma_s^2} + \frac{D}{(\tau - t)^2 + \sigma_s^2} \right) d\tau \quad (31) \end{aligned}$$

$(\tau - t)$ は置換積分できて変数変換後も積分区間は同じくとして, 続ける(32).

$$\begin{aligned} x &= \tau - t \\ \frac{d\tau}{dx} &= 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{\tau^2 + \sigma_f^2} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{\tau^2 + \sigma_f^2} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(x+t)}{x^2 + \sigma_s^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{x^2 + \sigma_s^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{\tau^2 + \sigma_f^2} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{\tau^2 + \sigma_f^2} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cx}{x^2 + \sigma_s^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ct}{x^2 + \sigma_s^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{x^2 + \sigma_s^2} dx \\ &= \left[\frac{A}{2} \log(\tau^2 + \sigma_f^2) \right]_{-\infty}^{\infty} + \left[\frac{B}{\sigma_f} \tan^{-1} \frac{\tau}{\sigma_f} \right]_{-\infty}^{\infty} + \left[\frac{C}{2} \log(x^2 + \sigma_s^2) \right]_{-\infty}^{\infty} + \left[\frac{Ct}{\sigma_s} \tan^{-1} \frac{x}{\sigma_s} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \left[\frac{D}{\sigma_s} \tan^{-1} \frac{x}{\sigma_s} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{A}{2} \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \log(\tau^2 + \sigma_f^2) - \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \log(\tau^2 + \sigma_f^2) \right) + \frac{B}{\sigma_f} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{C}{2} (0) + \frac{Ct}{\sigma_s} (\pi) + \frac{D}{\sigma_s} (\pi) \\ &= \pi \left(\frac{B}{\sigma_f} + \frac{Ct + D}{\sigma_s} \right) = \frac{\pi}{\sigma_f \sigma_s} (\sigma_s B + \sigma_f (Ct + D)) \quad (32) \end{aligned}$$

まとめると観測信号は(33)となる.

$$\begin{aligned} m(t) &= a_f a_s \sigma_f \sigma_s \frac{\pi}{\sigma_f \sigma_s} (\sigma_s B + \sigma_f (Ct + D)) = a_f a_s \pi (\sigma_s B + \sigma_f (Ct + D)) \\ &= a_f a_s \pi \left(\sigma_s \frac{-t^2 - \sigma_s^2 + \sigma_f^2}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} + \sigma_f \frac{2t^2 - 3t^2 + \sigma_s^2 - \sigma_f^2}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{\sigma_f \sigma_s} \left(\frac{-(\sigma_s + \sigma_f)t^2 - \sigma_s^3 + \sigma_s \sigma_f^2 + \sigma_f \sigma_s^2 - \sigma_f^3}{-t^4 - 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 - (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \right) \\ &= a_f a_s \pi \left(\frac{(\sigma_s + \sigma_f)t^2 + \sigma_s^3 - \sigma_s \sigma_f^2 - \sigma_f \sigma_s^2 + \sigma_f^3}{t^4 + 2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)t^2 + (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_f a_s \pi \left(\frac{(\sigma_s + \sigma_f)t^2 + (\sigma_s - \sigma_f)(\sigma_s^2 - \sigma_f^2)}{(t^2 + \sigma_s^2 + \sigma_f^2)^2 - (\sigma_s^2 + \sigma_f^2)^2 + (\sigma_s^2 - \sigma_f^2)^2} \right) \\
&= a_f a_s \pi \left(\frac{(\sigma_s + \sigma_f)t^2 + (\sigma_s - \sigma_f)^2(\sigma_s + \sigma_f)}{(t^2 + \sigma_s^2 + \sigma_f^2)^2 + (\sigma_s^2 - \sigma_f^2 + \sigma_s^2 + \sigma_f^2)(\sigma_s^2 - \sigma_f^2 - (\sigma_s^2 + \sigma_f^2))} \right) \\
&= a_f a_s \pi \left(\frac{(\sigma_s + \sigma_f)(t^2 + (\sigma_s - \sigma_f)^2)}{(t^2 + \sigma_s^2 + \sigma_f^2)^2 + 2\sigma_s^2 \cdot -2\sigma_f^2} \right) \\
&= a_f a_s \pi \left(\frac{(\sigma_s + \sigma_f)(t^2 + (\sigma_s - \sigma_f)^2)}{(t^2 + \sigma_s^2 + \sigma_f^2)^2 - 4\sigma_s^2 \sigma_f^2} \right) \\
&= a_f a_s \pi \left(\frac{(\sigma_s + \sigma_f)(t^2 + (\sigma_s - \sigma_f)^2)}{(t^2 + \sigma_s^2 + \sigma_f^2 + 2\sigma_s \sigma_f)(t^2 + \sigma_s^2 + \sigma_f^2 - 2\sigma_s \sigma_f)} \right) \\
&= a_f a_s \pi \left(\frac{(\sigma_s + \sigma_f)(t^2 + (\sigma_s - \sigma_f)^2)}{(t^2 + (\sigma_s + \sigma_f)^2)(t^2 + (\sigma_s - \sigma_f)^2)} \right) \\
&= a_f a_s \pi \left(\frac{\sigma_s + \sigma_f}{t^2 + (\sigma_s + \sigma_f)^2} \right) \quad (33)
\end{aligned}$$

ローレンツ関数同士の畳み込みはローレンツ関数である。

以上より観測信号の偏差 σ_m は(34)である。

$$\sigma_m = \sigma_s + \sigma_f \quad (34)$$

すなわち半値幅は(35)である。

$$h_m = h_s + h_f \quad (35)$$

ガウス関数と異なり偏差の加算で表すことができる。さらに積分区間が半無限の場合はどうか(36)?

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{A}{2} \log(\tau^2 + \sigma_f^2) \right]_0^\infty + \left[\frac{B}{\sigma_f} \tan^{-1} \frac{\tau}{\sigma_f} \right]_0^{\infty\infty} + \left[\frac{C}{2} \log(x^2 + \sigma_s^2) \right]_0^\infty + \left[\frac{Ct}{\sigma_s} \tan^{-1} \frac{x}{\sigma_s} \right]_{-\infty}^\infty + \left[\frac{D}{\sigma_s} \tan^{-1} \frac{x}{\sigma_s} \right]_0^\infty \\
&= \frac{A}{2} \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \log(\tau^2 + \sigma_f^2) - \lim_{\tau \rightarrow 0} \log(\tau^2 + \sigma_f^2) \right) + \frac{B}{\sigma_f} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\
&+ \frac{C}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x^2 + \sigma_s^2) - \lim_{x \rightarrow 0} \log(x^2 + \sigma_s^2) \right) + \frac{Ct}{\sigma_s} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{D}{\sigma_s} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2} \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \log(\tau^2 + \sigma_f^2) - 2 \log \sigma_f \right) - \frac{A}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x^2 + \sigma_s^2) - 2 \log \sigma_s \right) \\
&+ \frac{\pi}{2} \left(\frac{B}{\sigma_f} + \frac{Ct + D}{\sigma_s} \right) = A \log \sigma_s - A \log \sigma_f + \frac{\pi}{2} \left(\frac{B}{\sigma_f} + \frac{Ct + D}{\sigma_s} \right) \\
&= A \log \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{B}{\sigma_f} + \frac{Ct + D}{\sigma_s} \right) = A \log \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} \right) + \frac{a_f a_s \pi}{2} \left(\frac{\sigma_s + \sigma_f}{t^2 + (\sigma_s + \sigma_f)^2} \right) \quad (36)
\end{aligned}$$

解析解の導出は困難である。しかしながら $\sigma_s \approx \sigma_f$ 近傍であれば $\log(\sigma_s/\sigma_f) \approx 0$ と近似できる。また $t(> 1) \rightarrow \infty$ ならば $A \rightarrow 0$ であり、 A が小さくなる速度は t の増大と共にローレンツ関数を上回る。以上、大雑把に(34), (35)に準ずるとしておく。

ガウス関数とローレンツ関数の仮定

ガウス関数とローレンツ関数ではどうだろうか(37), (38)?

$$f(t) = a_f \frac{\sigma_f}{t^2 + \sigma_f^2} \quad (37)$$

$$s(t) = a_s \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (38)$$

畳み込んで観測信号 $m(t)$ とする(39)

$$m(t) = a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_f}{\tau^2 + \sigma_f^2} \exp\left(\frac{-(t-\tau)^2}{2\sigma_s^2}\right) d\tau \quad (39)$$

どうあがいても積分不可である。とはいえフォークト関数(Voigt Function)という命名がある。なんらかの由来があるはずだが、不明である。

さて、積分できずとも本稿の興味は半値幅である。これまでの結果から推定することはできる(図3)。

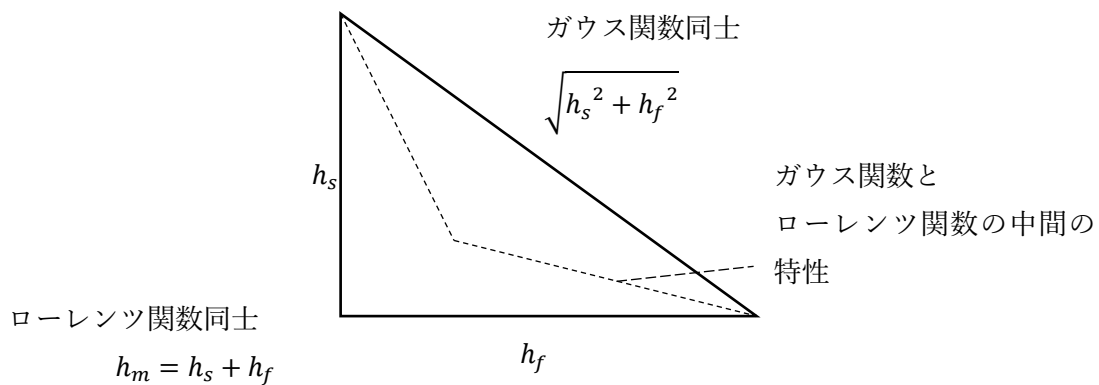


図3 半値幅の関係

今一度、ガウス関数同士では(14)、ローレンツ関数同士では(35)であった。

$$h_m = \sqrt{h_s^2 + h_f^2} \quad (14)$$

$$h_m = h_s + h_f \quad (35)$$

ガウス関数とローレンツ関数は似た形状であるが、同一の偏差であれば、ローレンツ関数の方がガウス関数より急峻な(減衰)カーブである。特性としては、この中間(40)と推定する。

$$\sqrt{h_s^2 + h_f^2} \leq h_m \leq h_s + h_f \quad (40)$$

ローレンツ関数とは?

カーブには様々な形状がある。ボケを評価する際に重要なのは、減衰の早さである。減衰を表現するのに多項式関数、指数、ガウス関数といったものがある。そして、カーブフィッティングによりガウス関数に近いカーブといった評価をすることができる。

指数関数として代表的なのはやはり過渡特性かと思う。ガウス関数は確率由来というイメージである。一方、ローレンツ関数だが、どのような関数だろうか? 光学では、しばしば登場する関数である。特にスペクトルの形状はローレンツ分布で表現するのが一般的である。物理における微分方程式では共鳴現象があるかもしれない。微分方程式といえば、ほぼ振動を扱うモデルである。2階微分方程式の形式は(41)である。

$$\alpha \frac{d^2 f}{dt^2} + \beta \frac{df}{dt} + \gamma f = 0 \quad (41)$$

この形式は運動方程式では(42)、電気では(43)である。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx \quad (42)$$

x : 空間

m : 質量

μ : 摩擦係数

k : バネ係数

$$l \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q \quad (43)$$

q : 電荷

l : インダクタ

r : 抵抗

c : キャパシタ

ここで、2階微分の係数で正規化して(41)を(44)と表す。

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \beta \frac{df}{dt} + \gamma f = 0 \quad (44)$$

筆者の認識では、(44)の右辺で外乱(外力)成分を表現する。ローレンツ分布では外力により振動を与える、とされる(45)。

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \beta \frac{df}{dt} + \gamma f = g e^{i\omega t} \quad (45)$$

g : 外乱(外力)の振幅

(44)の一般解の導出はラプラス変換により容易だが、振動としてよく知られている(46)。

$$f(t) = a e^{i\omega t} \quad (46)$$

すなわち、外力と系が共鳴(同一の角周波数)とする。これを(45)に代入する(47)。

$$-a\omega^2 e^{i\omega t} + i\beta a\omega e^{i\omega t} + \gamma a e^{i\omega t} = g e^{i\omega t} \quad (47)$$

$$(-\omega^2 + i\beta\omega + \gamma)a = g$$

$$a = \frac{g}{\gamma - \omega^2 + i\beta\omega}$$

よって f (48)である。

$$f = \frac{g}{\gamma - \omega^2 + i\beta\omega} e^{-i\omega t} \quad (48)$$

振幅は(49)である。

$$|f| = \frac{g}{\sqrt{(\gamma - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2}} \quad (49)$$

パワーを2乗とすれば(50)である。

$$|f|^2 = \frac{g^2}{(\gamma - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} \quad (50)$$

ローレンツ関数らしき形式となる。他によい事例が見当たらず、解りやすい事例ではなかったかもしれない。ともかくとして、ローレンツ関数に遭遇することがある、。

ガウス関数と指数関数の仮定

最後にガウス関数と指数関数(減衰: 過渡特性)である(51), (52).

$$f(t) = a_f \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_f^2}\right) \quad (51)$$

$$s(t) = a_s \exp(-\lambda t) \quad (52)$$

畳み込んで観測信号 $m(t)$ とする(53)

$$\begin{aligned} m(t) &= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\sigma_f^2}\right) \exp(-\lambda(t-\tau)) d\tau \\ &= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\sigma_f^2} + \lambda\tau - \lambda t\right) d\tau \\ &= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\tau^2}{2\sigma_f^2} - \lambda\tau\right) - \lambda t\right) d\tau \\ &= a_f a_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\tau}{\sigma_f\sqrt{2}} - \frac{\sigma_f\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sigma_f^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right) d\tau \\ &= a_f a_s \exp\left(\frac{\sigma_f^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\tau}{\sigma_f\sqrt{2}} - \frac{\sigma_f\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2\right) d\tau \quad (53) \end{aligned}$$

置換積分(54)できて, やはりガウス積分を用いる.

$$x = \frac{\tau}{\sigma_f\sqrt{2}} - \frac{\sigma_f\lambda}{\sqrt{2}} \quad (54)$$

$$\tau = \sigma_f\sqrt{2}\left(x + \frac{\sigma_f\lambda}{\sqrt{2}}\right) = \sigma_f\sqrt{2}x + \sigma_f^2\lambda$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \sigma_f\sqrt{2}$$

観測信号 $m(t)$ は(55)となる.

$$\begin{aligned} m(t) &= a_f a_s \exp\left(\frac{\sigma_f^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \frac{d\tau}{dx} dx \\ &= a_f a_s \exp\left(\frac{\sigma_f^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right) \sigma_f\sqrt{2}\sqrt{\pi} \\ &= a_f a_s \sigma_f\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\sigma_f^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right) \end{aligned}$$

$$= a_f a_s \sigma_f \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\sigma_p^2 \lambda^2}{2}\right) \exp(-\lambda t) \quad (55)$$

結果は指数関数 $s(t)$ の減衰カーブそのものとなる。これは、ガウス関数同士のと看同じく、積分区間を半無限としても成立する(56)。

$$\begin{aligned} m(t) &= a_f a_s \exp\left(\frac{\sigma_f^2 \lambda^2}{2} - \lambda t\right) \int_0^\infty \exp(-x^2) \frac{dx}{x} \\ &= a_f a_s \sigma_f \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{\sigma_p^2 \lambda^2}{2}\right) \exp(-\lambda t) \quad (56) \end{aligned}$$

指数関数には半値幅は存在しないが、この結果は畳み込みにおける直観を与えている。指数関数とガウス関数の違いはその減衰の早さである。

- * 指数関数は指数の肩が1次
- * ガウス関数は指数の肩が2次

当然ではあるが指数関数の方がガウス関数より緩く減衰するカーブ($t > 1$)である。すなわち、畳み込み後の波形では、**緩いカーブが支配的**ということができる。

現実の応答モデル

ここまで数式の導出だけの味気ない内容だったかもしれない。だが、観測信号が以上の関数で近似(カーブフィッティング)できるのであれば、意味がある。現実のシステムでは下記に注意である。

- * 積分区間が有限
- * 畳み込みが0以上の正区間のことがある(時系列)
- * 離散系によるサンプリング
- * 繰り返しの系(応答の累積)

システムの応答関数を推定するのに畳み込み波形と観測波形の残差を最小化する反復法が使えることもある。しかし、計算コストの面から現実的ではない。一方、繰り返しの系では、デコンボリューションが有効である。周波数解析(FFT)のデコンボリューションにより直接、システム応答関数の波形を特定することができる。応答関数はスペクトルでは伝達関数ということになる。筆者の経験では、高周波の観測ではオシロではなくスペクトルアナライザによることもあり、Sパラメータ(スペクトル)の観測となる。このような場合でも周波数変換による波形の再構成は可能である。これにより、波形の立ち上がり、立ち下りのタイミングを視認でき、大きなメリットとなる(筆者は関連特許の実績あり)。

おわりに

筆者は長い間、システムの性能を考える機会に恵まれてきた。その中でシステムの劣化がどこにあるのか見当をつけたい、という場面があった。そのような場面で本稿が一助になれば、という次第である。